Das Töpler-Verfahren zum Ziehen von Quadratwurzeln

Das Töpler-Verfahren zum Ziehen von Quadratwurzeln macht sich zunutze, dass die Summe der ersten *n* ungeraden Zahlen gleich dem Quadrat von *n* ist:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(2 \times i + 1) = n^2$$

Beispiel:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & = & 1 & = & 1^2 \\ 1+3 & = & 4 & = & 2^2 \\ 1+3+5 & = & 9 & = & 3^2 \\ \dots & & & & \end{array}$$

Aufgabe: Kannst Du das beweisen?
Aufgabe: Kannst du eine Formel für die *n*-te ungerade Zahl (in Abhängigkeit von *n*) angeben?

Bei einer Quadratzahl ist damit die Quadratwurzel gleich der Anzahl der aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen, die man, bei 1 beginnend, nacheinander vom Radikanden abziehen kann.

Aufgabe: Zeige: Erhöht man den letzten Subtrahenden um 1, so erhält man das Doppelte der gesuchten Wurzel.

Anwendung des Töpler-Verfahrens auf eine zweistellige Quadratzahl: $\sqrt{16} = 4$

Schritt	*abzuziehen*	*Rechnung*	*insgesamt abgezogen*
1	1	16 – 1 = 15	1
2	3	15 – 3 = 12	4
3	5	12 – 5 = 7	9
4	7	7 – 7 = 0	16

Ausführung auf einer Rechenmaschine:
Die Zahl 16 einkurbeln, Umdrehungszählwerk auf Null stellen. Nun der Reihe nach durch Minusdrehungen die arithmetische Reihe der ungeraden Zahlen abziehen, bis im Resultatwerk eine Null steht (in unserem Beispiel sind 1, 3, 5 und 7 abzuziehen). Im Umdrehungszählwerk steht nun die Quadratwurzel, 4.

Bei größeren Radikanden macht man sich zunutze, dass 100 eine Quadratzahl ist.
Man teilt die zu radizierende Zahl von rechts nach links in Gruppen zu je zwei Ziffern, zieht für jede Gruppe von links nach rechts die Wurzel und achtet darauf, beim Verschieben des Schlittens die zu subtrahierende ungerade Zahl anzupassen.

Anwendung des Töpler-Verfahrens auf eine fünfstellige Quadratahl:

$$\sqrt{74529} = 273$$

Ausführung auf einer Rechenmaschine:

- Schlitten nach rechts stellen, die Zahl 74529 einkurbeln, Umdrehungszählwerk auf Null stellen:

U	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0
R	0	0	7	4	5	2	9

- 1 von der linkesten Zweiergruppe subtrahieren:

U	0	0	1	0	0	0	0
E	0	0	1	0	0	0	0
R	0	0	6	4	5	2	9

- 3 subtrahieren:

U	0	0	2	0	0	0	0
E	0	0	3	0	0	0	0
R	0	0	3	4	5	2	9

- Als nächstes wäre eine 5 zu subtrahieren. Da der Wert der betreffenden Stelle dafür zu klein ist, wird der Schlitten um 1 Stelle nach links geschoben. Aus der 2 im Umdrehungszählwerk wird damit eine 20, aus der 3 im Einstellwerk eine 30.

U	0	0	2	0	0	0	0
E	0	0	3	0	0	0	0
R	0	3	4	5	2	9	0

- Die der Wurzel 20 entsprechende 20. ungerade Zahl ist die Zahl 2*20-1 = 39. Die Rechenmaschine ist durch das Verschieben des Schlittens also in denselben Zustand versetzt worden, als seien der Reihe nach die Zahlen 1, 3, 5, ..., 39 subtrahiert worden. Die nächste abzuziehende Zahl ist die 41, die dadurch eingestellt wird, dass die 3 im Einstellwerk um 1 erhöht und rechts von ihr eine 1 eingestellt wird. Nun wird 41 subtrahiert.

U	0	0	2	0	0	0	0
E	0	0	4	1	0	0	0
R	0	3	0	4	2	9	0

- Nun der Reihe nach 43, 45 ... subtrahieren, bis die zu subtrahierende Zahl wieder so groß geworden ist, dass ein Verschieben des Schlittens erforderlich ist. Dies ist nach der Subtraktion von 53 der Fall:

U	0	0	2	7	0	0	0
E	0	0	5	3	0	0	0
R	0	0	1	6	2	9	0

- Wieder wird der Schlitten um 1 Position nach links geschoben:

U	0	0	2	7	0	0	0
E	0	0	5	3	0	0	0
R	0	1	6	2	9	0	0

- Und mit derselben Überlegung wie oben wird die Zahl im Einstellwerk (53) um 1 erhöht und rechts um die Ziffer 1 ergänzt (541). Diese Zahl wird subtrahiert.

U	0	0	2	7	0	0	0
E	0	0	5	4	1	0	0
R	0	1	0	8	8	0	0

- Nun werden weiter die folgenden ungeraden Zahlen subtrahiert, bis im Resultatwerk nur noch Nullen stehen. Im Umdrehungszählwerk steht dann das Ergebnis.